Forschungsseminar im WS 2010/11
Stationäre und invariante Maße nach Benoist und Quint

Sei G eine reelle, einfache Liegruppe, Γ ein Gitter in G. Die Sätze von Ratner besagen, dass für eine zusammenhängende, von unipotenten Elementen erzeugte Untergruppe H von G und für jedes x in G/Γ der Abschluss der Bahn Gx 'nett' ist, d.h. insbesondere die Bahn eine Gruppe H' mit $H \subset H' \subset G$. Es gibt auch eine Version für H-invariante Maße dieses Satzes.

Die neue Arbeit von Benoist und Quint ist in der Lage nicht nur invariante, sondern auch stationäre Maße zu klassifizieren: Es gibt keine außer den offensichtlichen, d.h. nur Dirac-Maße und das Haar-Maß. Der Fortschritt ist auch für Bahnabschlüsse groß: Statt obigen Voraussetzen an H kommt man mit H Zariski-dicht (und z.B. diskret) aus.

Geschichtliches, d.h. welche Vermutungen in diophantischer Approximation und Zählproblemen die Ratner-Arbeit motiviert haben, folgen im ersten Vortrag. Darin wird auch erklärt, wieso das Liegruppenproblem zu einem Problem über Brownsche Bewegung wird.

Die Ratnerschen Sätze haben eine tiefgreifende Technik, die 'H-Property', die wir verstehen wollen, da sie als Modell für eine mächtigere Technik, die 'Exponentialdrift' dient (Vorträge 2 und 3). Die Exponentialdrift treibt in Richtung der Lyapunov-Unterbündel, folglich erklären Vorträge 4, 5a, 5 was dies ist und Fürstenbergs Resultate über Grenzverteilungen von zufälligen Matrixprodukten. Vortrag 8 ist ein weiterer Vortrag rein aus der Liegruppenwelt das eine quantitatives Nichtdivergenzresultat zeigt - ein Vorläufer für einen analogen Baustein bei [BQ]. Vorträge 6, 7 und 9-12 beackern dann wirklich die Arbeit [BQ].

Vorträge

1 **Übersichtsvortag**
Ziele: Geschichte: Raghunathans und Oppenheims Vermutung, die Ratnerschen Sätze und was [BQ] darüber hinaus zeigen können.
Situation: Das dynamische System $(B^{X,\tau}, \mathcal{B}^{X,\tau}, \beta^X, T^X)$ einführen und die wichtigsten Schritte des Beweises skizzieren.
Literatur: [BQ], [Ei] und Referenzen darin.

2 **Basisvariante des Ratnerschen Satzes (leicht)**
Ziele: Den horozyklischen Fluss (den brauchen wird ständig) und den geodätischen Flußauf der Modulfläche einführen. Die Vorarbeiten aus Abschnitt 3 (Rekurrenz, Ergodizität, Mautner-Phänomän), in Absprache mit dem nächsten Vortragenden.
Literatur: [Ei].

3 **Basisvariante des Ratnerschen Satzes**
Ziele: Beweis des Satzes im Spezialfall $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Ziel ist es, das von Ratner erkannte 'H-Prinzip' gut zu erläutern. (Dieses wird am Ende von [BQ] durch den Exponentialdrift ersetzt.)
Literatur: [Ei].

4 **Lyapunov Exponenten (leicht)**
Ziele: Begriffe Kozykel (mit Beispiel) und Lyapunov-Exponenten, Oseledecs Theorem 1.5 und Theorem 1.6.
Literatur: [BV].

5a **Generische Positivität des ersten Lyapunov-Exponenten (leicht)**
Ziele: Einfachster Fall [BV, Proposition 3.4] als Vorbereitung für den nächsten Vortrag. In Absprache mit dem Vortragenden von [5] entweder i) die Grundlagen über Lie-Gruppen (Cartan-Involution, Weilkammern, Höchstgewichtvektoren) legen, soweit in [BQ, S. 28-30] benötigt, oder ii) weiter in Richtung von [BQ, Proposition 5.2]. *Literatur:* [BV], [BQ, Proposition 5.2].

5 **Fürstenbergs Resultate über Brownsche Bewegung auf symmetrischen Räumen**
Ziele: Formulierung [BQ, Proposition 5.2], in enger Absprache mit dem Vortragenden von [5a]. Beste Quelle selbst suchen!
Literatur: ([BV]), [BQ, Proposition 5.2] und darin die Referenzen [2], [13] und/oder [15] nach dem einfachsten Zugang durchsuchen.

6 **Bernoulli-Shift mit Deckelfunktion (leicht)**
Ziele: Das dynamische System $(B^{X,\tau}, \mathcal{B}^{X,\tau}, \beta^X, T^X)$, z.T. Wiederholung aus dem Vortrag 1 und 5a (was ist X und M, [BQ, S. 28-30]), insbesondere das invariante Maß β mit Invarianz. Begriffe: Desintegration und Bedingte Erwartungswerte, allgemein und im konkreten Fall (Lemma 2.4 und Lemma 2.5).
Hier oder im nächten Vortrag sollte idealweise der Grund für das Einführen der Deckelfunktion ([BQ, Lemma 5.4], – wieviel schwächer wäre die Normkontrolle ohne das Einführen von τ ?) genannt werden. *Literatur:* [BQ].

7 **Desintegration des invariante Maß β^X, Formeln für bedingte Erwartungswerte (ziemlich leicht)**
Ziele: Das invariante Maß β^X ([BQ, Lemma 3.1]). Dessen Desintegration ν_b entlang der Projektion $\pi : B \times X \to X$ lässt sich als Grenzmaß von einem Produkt von Zufallsmatrixen beschreiben ([BQ, Lemma 3.2]). (Wegen Bemerkung 5.3 am besten mit Vortrag 5 absprechen.) Die Σ-Algebra $\mathcal{Q}_\ell^{\tau,X}$ der Ereignisse nach Zeit ℓ einführen. Bedingte Erwartungswerte bzgl. $\mathcal{Q}_\ell^{\tau,X}$ berechnet man durch Mitteln über alle möglichen Pfade zum Zielpunkt nach Zeit ℓ (Cor. 3.8, bzw. Lemma 2.5).
Literatur: [BQ]

8 **Quantitative Nichtdivergenz und der Mittelungsoperator (isoliert)**
Ziele: Wir isolieren in einem eigenständigen Vortrag die Eigenschaften des Mittelungsoperators, hier mit dem Ziel quantitative Nichtdivergenz des horozyklischen Flusses zu zeigen. Notationen bitte so, dass die Resultate in [BQ, Lemma 6.2] zitiert werden können. Wesentlich ist folglich der Beweis von [EM, Lemma 4.2]. Darüber hinaus das Kriterium Lemma 3.1 und soweit Zeit vorhanden der Abschnitt 3.1
Literatur: [EM].

9 **Die stabilen Blätter W_b haben ν_b-Maß Null**
Ziele: Wir wenden die Methode aus dem vorigen Vortrag (Eigenschaften des Mittelungsoperators) auf das Disintegrationsmaßν_b (von Fürstenberg) an und zeigen, dass $\nu_b(W_b) = 0$ (Abschnitte 6.2 und 3.4)
Literatur: [BQ, Proposition 3.9, Proposition 6.1].

10 **Der pseudo-Horozyklische Fluss Φ**
Ziele: Durch Driften entlang des Vektorraums gegeben durch den obersten Lyapunov-Exponenten kann man einen Fluß erzeugen, der vom geodätischen Fluß normalisiert wird, genau wie der horozyklische Fluß auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\Lambda$. Das ist nun eine formale Rechnung, [BQ, Lemma 6.10]. Da nach dem vorherigen Vortrag die stabilen Blätter ν_b-Maß Null haben, kann fast jeden Punkt (im Träger des Maßen) durch eine Folge von Punkten im Träger des Maßen annähern, die 'ein wenig in Richtung nicht gerade in V_0' wegliegen ([BQ, Cor. 6.15] Das ist die Basis für einen Ersatz der H-Eigenschaft.
Idealerweise sollte auch die Desintegration [BQ, Lemma 6.11], und dazu kurz der Abschnitt 4.1 behandelt werden.
Literatur: [BQ, Definition 6.9] [BQ].

11 **Beweis der Existenz von Exponentialdrift (viel Stochastik)**
Ziele: Jeder Punkt im Träger des Maßes hat einen Freund im Träger des Maßes, der höchstens ε in Top-Lyapunov-Richtung V_0 entfernt liegt. Dieses Eigenschaft wird uns erlauben zu zeigen, dass μ unter einer größeren Gruppe invariant ist, als man a priori erhoffen konnte. *Literatur:* [BQ, Proposition 7.1].

12 **Ernten der Früchte**
Ziele: Der Rest von Abschnitt 7 und Abschnitt 8 in [BQ], soweit mit den Vorbereitungen möglich.
Literatur: [BQ].

Literatur

[BV] Bochi, J., Avila, A., *Trieste Lecture notes on Lyapunov exponents*, available on `http://www.mat.puc-rio.br/~jairo/docs/trieste.pdf`

[BQ] Benoist, Y., Quint, J.-F.: *Mesures stationnaires et fermés invaraints des espaces homogènes* , available on the web page of J.-F. Quint

[EM] Eskin, A, Margulis, G., *Recurrence properties of random walks on finite volume homogeneous manifolds*, available on the web page of A. Eskin

[Ei] Einsiedler, M.: *Ratner's theorem on* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$*-invariant measures*, available on the web page of M. Einsiedler